ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Για το πεδίο ορισμού της $f = g \circ h$

$$D_{g \circ h} = \{x \in D_h \,/\, h(x) \in D_g\} = \{x > 0 \,/\, \ln x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= (0, +\infty)$$

Για τον τύπο της f έχουμε

$$f(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{4 - e^{2\cdot \ln x}}{e^{\ln x}} =$$

$$= \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, \quad x > 0$$

Β2. i) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ρητή και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2}$

$$= \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} = -\frac{x^2 + 4}{x^2} < 0$$

στο $(0, +\infty)$ οπότε η $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$

ii) Έχουμε: $\pi > e \xRightarrow{\eta\ f \downarrow} f(\pi) < f(e) \Rightarrow$

$$\frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Rightarrow e\cdot(4 - \pi^2) < \pi\cdot(4 - e^2)$$

$$\xRightarrow{4 - e^2 < 0} \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$$

B3. Κατακόρυφες (υποψήφια η $x=0$)

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = +\infty$ άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Οριζόντια - Πλάγια

Έχουμε $f(x)=\frac{4-x^2}{x} \Leftrightarrow f(x)=\frac{4}{x}-\frac{x^2}{x} \Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{4}{x}-x \Leftrightarrow f(x)-(-x)=\frac{4}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ άρα $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=0$

οπότε από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Για το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)} \overset{\frac{1}{-\infty}}{=\!=} 0$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $y=\sigma\upsilon\nu(1+x^2)$ είναι φραγμένη, αφού ισχύει $-1\le \sigma\upsilon\nu(1+x^2)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|\le 1$

Έχουμε $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| = \dfrac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{|f(x)|} \le \dfrac{1}{|f(x)|}$

άρα $-\dfrac{1}{|f(x)|} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le \dfrac{1}{|f(x)|}$

Επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|f(x)|}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|f(x)|}=0$ από το

κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=0$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Η f στο $[2,3]$ έχει τύπο $f(x)=\frac{1}{x}+\alpha$ και η

$y=x\cdot f(x)=x\cdot\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)=1+\alpha\cdot x$ είναι συνεχής

οπότε

$$\int_2^3 x\cdot f(x)\,dx=\int_2^3(1+\alpha\cdot x)\,dx=\left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3=$$

$$=\left(3+\frac{\alpha}{2}\cdot 9\right)-\left(2+\alpha\cdot\frac{2^2}{2}\right)=3+\frac{9\alpha}{2}-2-\frac{4\alpha}{2}$$

$$=1+\frac{5\alpha}{2}$$ οπότε $1+\frac{5\alpha}{2}=1\Leftrightarrow \alpha=0.$

Γ2.i) Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)}{\cancel{x-1}}=-1.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x}=-1.$$

Άρα η f παραγωγίσιμη (οπότε και συνεχής) στο $x_0=1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$(\varepsilon): \ y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow$

$y-1 = -1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y-1 = -x+1 \Leftrightarrow$

$y = -x+2$

Επειδή $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1$ η $\omega = 135^\circ$.

Γ3. Έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$

Η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f'(x) = 2x-3$

Η f παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ (ερώτημα Γ2i) άρα η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε και συνεχής στο $\mathbb{R}$

Στο $(-\infty,1)$ η $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ απορρίπτ.

Στο $(1,+\infty)$ $f'(x) \neq 0$

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε

Στο $(-\infty,1)$: $x<1 \Rightarrow x<\frac{3}{2} \Rightarrow 2x-3<0 \Rightarrow f'(x)<0$

Στο $(1,+\infty)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Έτσι

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνήσια φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ η $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1.

Για το σύνολο τιμών της

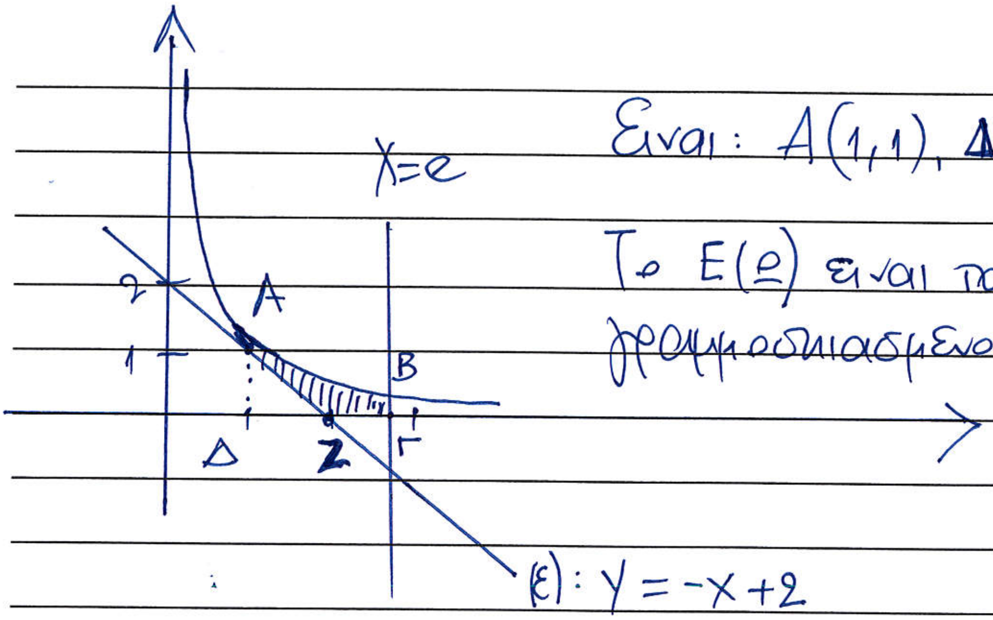
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2-3x+3) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα $f((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

Γ4. Ζητείται εμβαδόν ενός χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων, της $f(x) = \frac{1}{x}$, της $(\varepsilon): y = -x+2$ και του $x'x$ άξονα δηλ. της $y = 0$.

Θα κάνουμε σχήμα.



Είναι: $A(1,1)$, $\Delta(1,0)$, $\Gamma(e,0)$, $Z(2,0)$

Το $E(\varrho)$ είναι το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Το ζητούμενο εμβαδό θα το υπολογίσουμε ως την διαφορά του $(A\Delta Z)$ από το εμβαδό $(A\Delta B\Gamma)$

Έχουμε $(A\Delta B\Gamma) = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^e =$

$$= [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$

$$(A\Delta Z) = \frac{1}{2}\cdot(\Delta Z)\cdot(A\Delta) = \frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Άρα $E(\varrho) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Για x κοντά στο 1 θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\ell$.

Έχουμε $f(x)-2x=(x-1)\cdot g(x) \Leftrightarrow f(x)=2x+(x-1)\cdot g(x)$

και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[2x+(x-1)\cdot g(x)\right]=2+0\cdot\ell=2$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k\right]=\ln 1-1+k=$
$=k-1$

Άρα $k-1=2 \Leftrightarrow k=3$ οπότε $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3$

Δ2. Η f συνεχής στο $(0,2)$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\frac{1}{2-x}\cdot(2-x)'+\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}$

$=\frac{x^2+x-2}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$ (απορρ).

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε

x	0		1		2
x^2+x-2		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
			ΟΜ $f(1)=2$		

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) \overset{\ln 2-(+\infty)+3}{=\!=\!=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) \overset{(-\infty)-\frac{1}{2}+3}{=\!=\!=} -\infty$$

οπότε $f((0,1]) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

Το $0 \in (-\infty, 2]$ οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1)=0$ και αφού η $f \uparrow$ στο $(0,1)$ το x_1 μοναδικό με $x_1<1$.

$$f((1,2)) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$

Το $0 \in (-\infty, 2)$ άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (1,2)$ ώστε $f(x_2)=0$ και αφού η $f \downarrow$ στο $(1,2)$ το x_2 μοναδικό με $x_2 > 1$

Άρα η $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

Επειδή $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 =$

$= \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln 5 - \ln 3 > 0$ άρα

η ρίζα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Σημείωση: Έχουμε $5 > 3 \xRightarrow{y=\ln x \uparrow} \ln 5 > \ln 3 \Rightarrow$
$\ln 5 - \ln 3 > 0$

Δ3. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Αφού $x_1 < \frac{1}{3}$ ορίζεται το διάστημα $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$.

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$: $f'(\xi) = \dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right) - 0}{\frac{1-3x_1}{3}}$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Δ4. i) Αφού F, G αρχικές της f στο $(0,2)$ θα ισχύουν $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$ και

$F(x) = G(x) + c$ (1)

Η (1) για $x = x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow 0 = G(x_1) + c$
$\Leftrightarrow c = -G(x_1)$

Η (1) για $x = x_2$: $F(x_2) = G(x_2) + c \Rightarrow F(x_2) = 0 + c$
$F(x_2) = c$

Έτσι $-G(x_1) = F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii) Θεωρώ $h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 G(x_2) + 2x - x_1 - x_2$, $x \in [x_1, x_2]$

Η h συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών αφού $F(x)$, $G(x)$ συνεχείς ως παραγωγίσιμες

$$h(x_1) = \overset{\rho}{\cancel{x_1 \cdot F(x_1)}} + x_2 G(x_1) + 2x_1 - x_1 - x_2 =$$

$$= x_2 \cdot G(x_1) + x_1 - x_2 \xRightarrow{G(x_1) = -F(x_2)} -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2$$

$$h(x_2) = x_1 F(x_2) + \overset{\rho}{\cancel{x_2 G(x_2)}} + 2x - x_1 - x_2 =$$

$$= x_1 \cdot F(x_2) + x_2 - x_1.$$

Είναι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0,2)$ οπότε

$$x_1 < x \leq 1 \xRightarrow{\eta f \nearrow} f(x_1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x) \text{ και}$$

$$1 \leq x < x_2 \xRightarrow{\eta f \searrow} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0 \text{ οπότε}$$

η $f(x) > 0$ στο $(x_1, x_2) \Rightarrow F'(x) > 0$ στο (x_1, x_2)
οπότε $F \nearrow$ στο (x_1, x_2)

Για $x_1 < x_2 \xRightarrow{\eta F \nearrow} F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$

Άρα $-x_2 F(x_2) < 0$ και επειδή $x_1 - x_2 < 0$ έχουμε

$h(x_1) < 0$ και $x_1 F(x_2) > 0$, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow$

$h(x_2) > 0$.

Άρα $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $h(x)=0$ στο (x_1, x_2)

Για την μοναδικότητα:

$$h'(x) = x_1 \cdot f'(x) + x_2\, g'(x) + 2 =$$

$$= x_1 f(x_1) + x_2 f(x) + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2)$$

Άρα η $h \uparrow$ στο (x_1, x_2) οπότε η ρίζα που εξασφαλίσαμε με το Θ. Bolzano είναι μοναδική.